

時間領域差分法による多孔質材の吸音特性解析のための簡易吸音モデル

花田 泰紀

1. はじめに

当研究室ではポリエステル不織布 (PW) とその端材のりサイクル材 (RPW) を吸音材料として実用化するための研究を行っており、その基礎となる PW, RPW の吸音特性に関わる物理特性や材料の形状などに関する知見を蓄積している^{1,2)}。しかし実験によって得られるデータには限界があり、より細かなデータを得るには数値計算による解析が必要である。当研究室では今までに有限要素法 (FEM) による音場解析によって階段状などの吸音構造の特性を明らかにしてきた³⁾が、より詳しい吸音特性を把握するためには吸音の時間過程を把握する必要がある。よって、これに適した時間領域差分法 (FDTD) を用いた音場解析に着目した。

FDTD による音場解析は既に研究⁴⁾がなされており、そこで用いられる吸音モデルにはバネ-マスモデル⁵⁾や Rayleigh モデル⁶⁾に基づく方法が提案されている。バネ-マスモデルは計算過程で吸音材の性能を規定する基本特性である特性インピーダンスを用いるため計算精度が良いが、その反面、計算が煩雑となる。一方、Rayleigh モデルは計算過程では単位面積流れ抵抗を用いるだけなので、計算が容易である。しかし、Rayleigh モデルは、多孔質吸音材を単純な円筒管でモデル化しているために誤差が生じることが知られている。その改善策も提案⁷⁾されているが、必ずしも十分ではない。

そこで本研究では、FDTD で用いる吸音モデルとして Rayleigh モデルを取り上げ、PW の存在する音場を解析するための精度のよい簡易吸音モデルを提案することを目的とした。

2. 解析手法

2.1 FDTD における空気中の音の伝播

波動が伝播している 2 次元音場においては、媒質自体が伝播中に湧き出したり消滅したりしないことを示す連続の式 ((1) 式) と運動量保存則から求められる運動方程式 ((2), (3) 式) の 2 式が成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \kappa \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

ただし、 p は音圧、 u は粒子速度、 κ は体積弾性率、 ρ は密度である。これら (1), (2), (3) 式を差分近似する

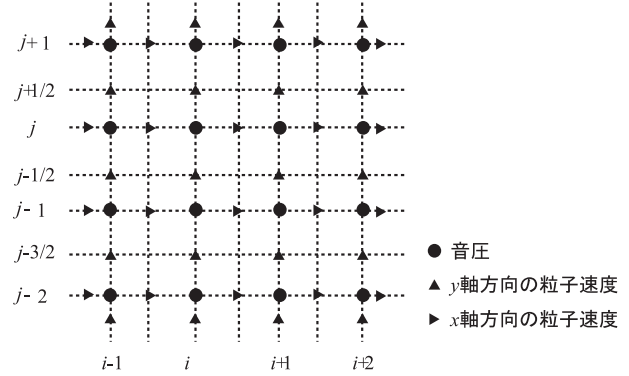


図-1 staggered メッシュ

と (4), (5), (6) 式の差分方程式が得られる。

$$p(t + \Delta t) = p(t) - \kappa \Delta t \left(\frac{u_x(x + \Delta x) - u_x}{\Delta x} + \frac{u_y(y + \Delta y) - u_y(y)}{\Delta y} \right) \quad (4)$$

$$u_x(t + \Delta t) = u_x(t) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (p(x + \Delta x) - p(x)) \quad (5)$$

$$u_y(t + \Delta t) = u_y(t) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (p(y + \Delta y) - p(y)) \quad (6)$$

これらの微分方程式を図-1 に示すような staggered メッシュを用いて計算を行う。すなわち、時刻 t の音圧は、時刻 $(t - 1)$ の音圧と時刻 $(t - 1/2)$ の粒子速度から、時刻 t の粒子速度は、時刻 $(t - 1)$ の粒子速度と時刻 $(t - 1/2)$ の音圧を用いて計算する。このように、音圧と粒子速度を交互に求めることにより音場内の過渡応答を計算する。連続の式は、

$$p\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right) = p\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\Delta t \kappa}{\Delta x} (u_x(i, j, t - 1) - u_x(i - 1, j, t - 1)) + \frac{\Delta t \kappa}{\Delta y} (u_y(i, j, t - 1) - u_y(i, j - 1, t - 1)) \right) \quad (7)$$

となり、運動方程式は、

$$u_x(i, j, t) = u_x(i, j, t - 1) - \frac{\Delta t}{\Delta x \rho} \left(p\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right) - p\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right) \right) \quad (8)$$

となる。ただし、 $p(x, y, t)$ は音場内の音圧、 $u_x(x, y, t)$ 、 $u_y(x, y, t)$ は x 、 y 方向の粒子速度、 Δt は時間離散幅、 Δx 、 Δy はそれぞれ x 軸、 y 軸方向の空間離散幅である。

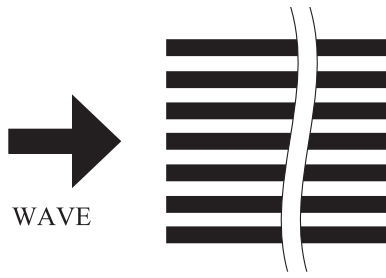


図-2 Rayleigh モデル

2.2 FDTDにおける多孔質材の吸音モデル

本研究では、吸音モデルとして扱いが容易な Rayleigh モデルを用いる。Rayleigh モデルとは、多孔質材を図-2 のような堅い骨格によって等間隔に仕切られた細管の集合体とみなすモデルである。このとき、摩擦力として粒子速度に単位面積流れ抵抗 σ [Ns/m⁴] をかけたものが減衰項として付加されるので、 x 軸方向において考えると、運動方程式は、

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \sigma u_x = 0 \quad (9)$$

となり、その差分式は、

$$u_x(i, j, t) = \left(1 - \frac{\Delta t \sigma}{\rho}\right) u_x(i, j, t-1) - \frac{\Delta t}{\Delta x \rho} \left(p\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right) - p\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right) \right) \quad (10)$$

となる。これは y 軸においても同様である。また、連続の式の扱いは空気中の伝播の時と同様である。

3. Rayleigh モデルの誤差

以上のように、Rayleigh モデルによる吸音モデルは与える値が単位面積流れ抵抗だけであり、扱いが容易であるが、その一方で、多孔質材を単純な細管の集合とみなすため吸音率の値に誤差が生じる。例えば、単位面積流れ抵抗が同じであるグラスウール (GW) と PW の吸音特性の違いを表すことはできない。そこで本研究では、まず Rayleigh モデルによる音場解析から得られる吸音率の誤差について検討する。

多孔質吸音材の吸音特性を表すモデルとしては Komatsu モデル^{7) 8)} が知られている。Komatsu モデルは実測値とよく合うことが示されているので、Rayleigh モデルの値と Komatsu モデルの値を比較することにする。比較する材料は GW, PW, 様々な繊維仕様の PW の端材を用いて製作されるリサイクル材の (RPW_I, ベース, パインダーともに 2de である PW の端材から製作されるリサイクル材の RPW_{II}) である。

材の平均的な性能値として、単位面積流れ抵抗 σ [Ns/m⁴] が、GW は 14,000 Ns/m⁴, PW は 15,000 Ns/m⁴, RPW_I は 8,000 Ns/m⁴, RPW_{II} は 11,000 Ns/m⁴, 厚さ 100 mm の材料の吸音率を Rayleigh モデルと Komatsu モデルで算出し比較した。結果を図-3 に示す。Rayleigh モデルと Komatsu モデルでは、吸音率が一致しないことが確認された。

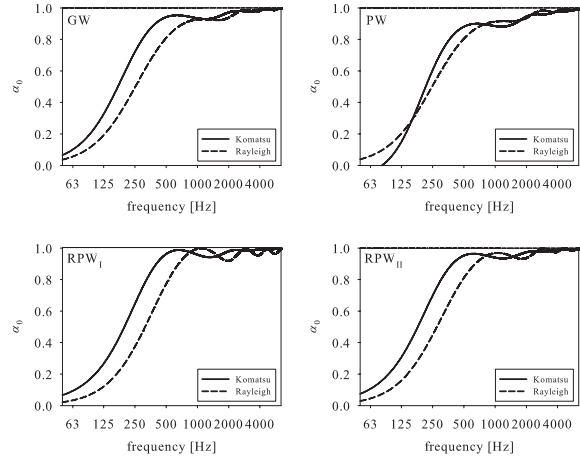


図-3 Rayleigh モデルと Komatsu モデルの比較

4. 簡易吸音モデル

以上のように、Rayleigh モデルは多孔質材料の吸音率を正しく評価できない。そこで筆者は、Rayleigh モデルに用いる単位面積流れ抵抗 σ と材料の厚さ l を補正することで、吸音率を正しく評価することができないか考えた。なお、FDTD では、吸音材の厚さの補正は空間離散幅 $\Delta x, \Delta y$ を補正することで達成する。

4.1 σ, l と σ', l' の関係

本研究で提案しようとする簡易吸音モデルは、具体的には、単位面積流れ抵抗が σ で厚さが l の材料について、Komatsu モデルによって求められる吸音率に近い値を持つための Rayleigh モデルにおける σ' と l' を求めるといものである。

まず、 σ を 4,000 ~ 40,000 Ns/m⁴ まで 1,000 刻み、 l を 10 ~ 300 mm まで 10 刻み、 σ' を 500 ~ 40,000 Ns/m⁴ まで 500 刻み、 l' を 5 ~ 500 mm まで 5 刻みでとり、Komatsu モデルと Rayleigh モデルのそれぞれの吸音率 (それぞれ α_k, α_r と表記する) を、1/12 オクターブバンドごとに平均をとり (11) 式によって 2 乗誤差を計算し、 S の値が一番小さなものを探した。その結果を GW, PW を例として図-4 に示す。

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_k(i) - \alpha_r(i))^2} \quad (11)$$

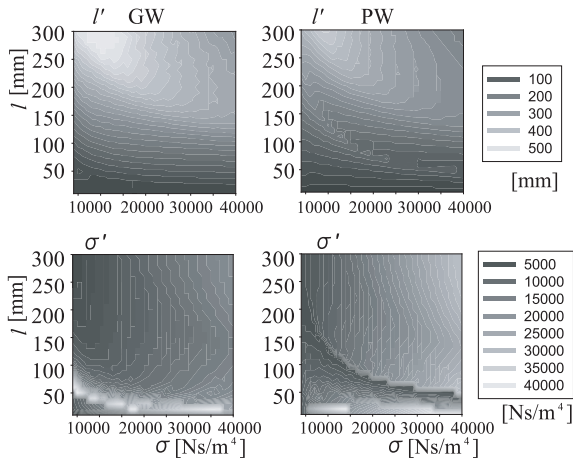


図-4 σ, l と σ', l' の関係

4.2 l' の導出

図-4 に示した σ', l' を σ と l を変数とする関数で表す。まず l' を表す式を求める。手順として、初めに l' と l の関係を調べ、 l から l' を求める回帰式を求める。次に、その回帰式の係数と σ の関係を調べ、回帰係数を σ の回帰式で表す。その過程の例として、図-5 に GW の $\sigma=20,000$ のときの l' と l の関係と (12) 式の係数の b と σ の関係を示す。結果として、 l' を (12) 式で回帰し、その係数を (13) 式で回帰した。

$$l' = a + b \exp \left\{ -0.5 \left(\frac{l-c}{d} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2\sigma + a_3\sigma^2 \\ b = b_1 + b_2\sigma + b_3\sigma^2 \\ c = c_1 + c_2\sigma + c_3\sigma^2 \\ d = d_1 + d_2\sigma + d_3\sigma^2 \end{cases} \quad (13)$$

PW, RPW_I, RPW_{II} はすべて同じ形の式で表すことができた。各回帰係数を表-1 に示す。係数が非常に小さな値になっている所があるが、これは x 軸に設定している σ の値が y 軸の値に比べて非常に大きいためである。なお (11) 式の $\alpha_k(i), \alpha_r(i)$ を l, l' に置き換えて求めた S の値は、GW が 21.4, PW が 17.7, RPW_I が 14.6, RPW_{II} が 11.3 となった。

4.3 σ' の導出

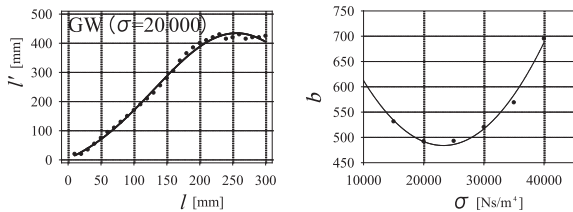


図-5 l' vs. l と b vs. σ (GW)

表-1 回帰係数

	GW	PW	RPW _I	RPW _{II}
a_1	-202.503	-32.506	-175.817	-195.945
a_2	0.019	0.00498	0.012	0.014
a_3	-0.000000582	-0.000000234	-0.000000287	-0.000000311
b_1	878.515	551.807	781.675	899.317
b_2	-0.033	-0.017	-0.019	-0.029
b_3	0.000000728	0.000000359	0.000000304	0.000000474
c_1	386.414	377.142	419.792	486.078
c_2	-0.00826	-0.00756	-0.00921	-0.0139
c_3	0.0000000971	0.000000085	0.000000116	0.000000195
d_1	182.965	145.611	235.56	272.706
d_2	-0.00543	-0.00276	-0.00798	-0.0105
d_3	0.000000135	0.000000083	0.000000146	0.000000186

同様の手順で、 σ' を表す回帰式を導出した。すなわち、 σ' と l の関係を調べて σ' を求める回帰式を求め、その回帰係数と σ の関係を調べて回帰係数を σ の回帰式で表した。その過程の例として、図-6 に GW の $\sigma=20,000$ のときの σ' と l の関係と (14) 式回帰係数 f と σ の関係を示す。GW, RPW_I, RPW_{II} では σ' を (14) 式で、PW では σ' を (15) 式で回帰し、各回帰係数を、GW, PW, RPW_I, RPW_{II} の場合それぞれ (16), (17), (18), (19) 式で回帰した。

$$\sigma' = e + f \exp \left\{ -0.5 \left(\frac{l-g}{h} \right)^2 \right\} + il \quad (14)$$

$$\sigma' = e + fl + gl^2 + hl^3 \quad (15)$$

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2\sigma \\ f = f_1 + f_2\sigma \\ g = g_1 + g_2\sigma + g_3\sigma^2 \\ h = h_1 + h_2\sigma + h_3\sigma^2 \\ i = i_1 + i_2\sigma \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2\sigma \\ f = f_1 + f_2\sigma \\ g = g_1 + g_2\sigma \\ h = h_1 + h_2\sigma \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2\sigma + e_3\sigma^2 + e_4\sigma^3 \\ f = f_1 + f_2\sigma \\ g = g_1 + g_2\sigma \\ h = h_1 + h_2 \exp\{h_3\sigma\} \\ i = i_1 + i_2\sigma \end{cases} \quad (18)$$

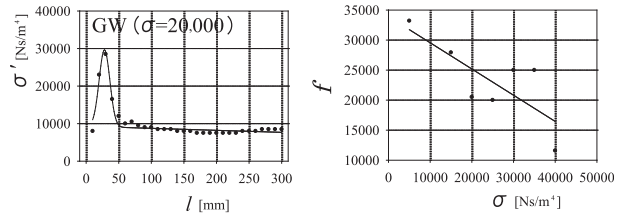


図-6 σ' vs. l と b vs. σ (GW)

表-2 回帰係数

	GW	PW	RPW _I	RPW _{II}
e_1	5964.330	4225.339	12771.479	7786.495
e_2	0.211	1.146	-0.799	0.185
e_3	—	—	0.0000496	—
e_4	—	—	-0.00000000779	—
f_1	33925.126	47.389	31939.023	33075.742
f_2	-0.437	-0.0122	-0.167	-0.522
g_1	71.370	-0.639	43.671	61.418
g_2	-0.00336	0.0000766	-0.000974	-0.00441
g_3	0.0000000560	—	—	0.000000166
g_4	—	—	—	-0.0000000000200
h_1	15.864	0.00147	6.509	4.000
h_2	-0.000707	-0.000000135	0.0000196	10.281
h_3	0.0000000120	—	0.000357	0.000111
i_1	-21.998	—	-31.625	-25.733
i_2	0.000727	—	0.000703	0.000236

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2\sigma \\ f = f_1 + f_2\sigma \\ g = g_1 + g_2\sigma + g_3\sigma^2 + g_4\sigma^3 \\ h = h_1 + h_2 \exp\{h_3\sigma\} \\ i = i_1 + i_2\sigma \end{cases} \quad (19)$$

得られた回帰係数の値を表-2 に示す。係数が非常に小さな値になっている所があるが、これは x 軸に設定している σ の値が y 軸の値に比べて非常に大きいためである。なお (11) 式の $\alpha_k(i)$, $\alpha_r(i)$ を σ , σ' に置き換えて求めた S の値は、GW が 2719.8, PW が 5428.7, RPW が 3599.5, RPW が 2197.8 となった。

4.4 簡易吸音モデルの有効性の検証

上に提案した簡易吸音モデルから算出した吸音率 (Rayleigh モデルに σ' , l' を適用して得られる吸音率) を Komatsu モデルから算出した吸音率と比較して図-7 に示す。また、参考として、GW, PW の特性インピーダンス (Z_c) と伝播定数 (γ) を比較して図-8 に示す。これらより、吸音率はよく合っているが、 Z_c , γ は合っていないことがわかる。

5. まとめ

本研究は、多孔質吸音材料 PW, RPW の吸音特性を FDTD によって解析するための簡易吸音モデルを提示した。すなわち、FDTD で必要な吸音モデルとして Rayleigh モデルを用いる際に、単位面積流れ抵抗 σ および材料の厚さ l を補正することで、吸音率を精度良く求めることができることを示した。しかしながら、本論文で提示した方法では、材料の吸音性能を規定する特性インピーダンス Z_c や伝搬定数 γ を的確に評価することはできていない。これらは材料の特性を表す重要な物性値であり、これらを見捨てて吸音に関わる物理現象を追うことは理に適ったことではない。よって、本論文で提示した簡易吸音モデルを発展させていくためには、 Z_c , γ を表現できるよう吸音モデルを改良する必要がある。

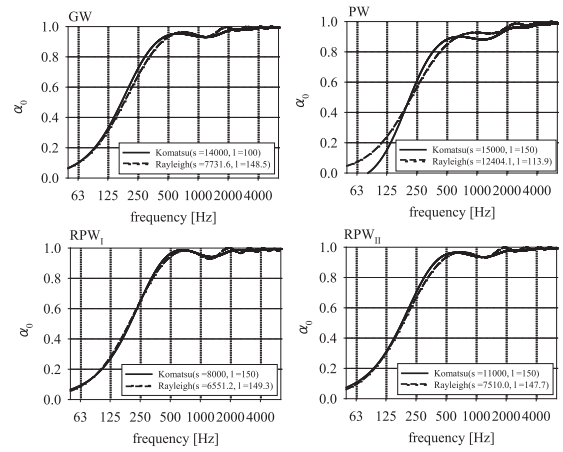


図-7 本モデルと Komatsu モデルの比較 (α_0)

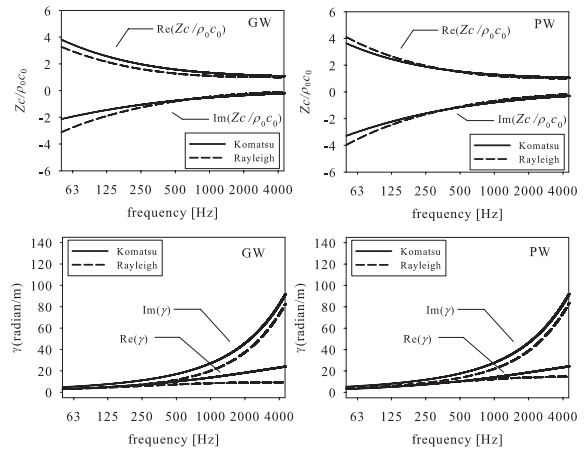


図-8 本モデルと Komatsu モデルの比較 (Z_c, γ)

参考文献

- 1) 勝原聡寛, 穴井謙, 藤本一寿, ポリエステル不織布とそのリサイクル材を用いた吸音構造の研究 その 3 材料の流れ抵抗と音響特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集 D-1, 365-366 (2008.9)
- 2) 藤本一寿, 勝原聡寛, 穴井謙, ポリエステル不織布とそのリサイクル材を用いた吸音構造の研究 その 4 階段状吸音構造の吸音性能, 日本建築学会大会学術講演梗概集 D-1, 367-368 (2008.9)
- 3) 大塚健太, ポリエステル不織布による高性能吸音構造に関する基礎的研究, 九州大学修士論文 (2008.3)
- 4) 坂本慎一, 橋秀樹, 差分法による 2 次元音場の過渡応答の数値計算, 日本建築学会講演梗概集 D, 環境工学 1757-1758 (1994.9)
- 5) 坂本慎一, 橋秀樹, 差分法を用いた過渡応答計算における吸音境界条件の検討, 日本音響学会建築音響研究会資料 AA95-28 (1995)
- 6) C.Zwikker, C.Kosten, Sound Absorbing Materials, Elsevier Publishing Company, Amsterdam (1949)
- 7) T.Komatsu, Improvement of the Delany-Bazlay and Miki models for fibrous sound-absorbing materials, Acoust. Soc. & Tech., 29, 121-129 (2008)
- 8) 勝原聡寛, 平栗靖浩, 穴井謙, 藤本一寿, ポリエステル不織布とそのリサイクル材の単位面積流れ抵抗と吸音特性, 日本建築学会九州支部研究報告, 第 48-2 号, 印刷中 (2009.3)